Оглавление

[КОНТЕКСТ ДИСЦИПЛИНЫ 1](#_Toc21645840)

[ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ 2](#_Toc21645841)

[НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 2](#_Toc21645842)

[Элементы и множества 2](#_Toc21645843)

[Высказывания 3](#_Toc21645844)

[Граничное значение 5](#_Toc21645845)

[Подмножества 5](#_Toc21645846)

[Логические операции 6](#_Toc21645847)

[Графическое изображение множеств 8](#_Toc21645848)

[Операции над множествами 9](#_Toc21645849)

[Основные тождества алгебры множеств 12](#_Toc21645850)

[Кортеж. Связь понятий кортежи множество 13](#_Toc21645851)

[Прямое произведение 14](#_Toc21645852)

[Отношения 18](#_Toc21645853)

[Симметричность, Рефлексивность, Транзитивность 19](#_Toc21645854)

[Функции 19](#_Toc21645855)

[Свойства функций 20](#_Toc21645856)

# КОНТЕКСТ ДИСЦИПЛИНЫ

У всех программ есть общая черта – они преобразуют полученные от пользователя данные в информацию, которая этому пользователю полезна.

При разработке новых программ всегда встают два вопроса:

1. Какую программу нужно сделать?
2. Правильно ли сделана программа?

Для ответа на первый вопрос выполняют анализ предметной области. Результатом этого анализа становятся требования, оформленные в виде технического задания. Наличие технического задания – необходимое условие для того, чтобы приступить к ответу на второй вопрос. Проверка соответствия между реальным и ожидаемым поведением программы это тестирование программного обеспечения, осуществляемая на конечном наборе тестов, выбранном определенным образом. [IEEE Guide to Software Engineering Body of Knowledge, SWEBOK, 2004]

Процесс тестирования состоит из этапов:

* Планирование работ
* Проектирование тестов
* Выполнение тестирования
* Анализ полученных результатов

Материалы этой дисциплины были подготовлены для того, чтобы вы смогли проектировать тесты и планировать свою работу.

# ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика, или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности.

Основные множества в программном обеспечении конечны. Это

* исходные данные
* состояния системы
* результаты запуска

При этом *возможные* исходные данные всегда больше, чем *известные* исходные данные. *Возможные* исходные данные в некоторых случаях могут быть бесконечны. *Возможные* результаты запуска могут быть заранее известны при любых исходных данных. Они также могут быть бесконечными, как и исходные данные.

Первая цель – научить подбирать минимально необходимый набор исходных данных для тестирования. Для этого будет изучаться теория множеств и математическая логика.

Состояния системы это особое множество. Как правило, программа может переходить из одного состояния в другое по строго заданным правилам.

Вторая цель – научить составлению сценариев для проверки правил изменения состояний системы. Чтобы ее добиться, будет изучена теория графов.

Третья цель – развитие внимательности.

Сегодня дискретная математика является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

# НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## Элементы и множества

Цель: освоить термины, научиться видеть множества в окружающем мире и описывать их с помощью математических формул.

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов. Для определенности остановимся на следующем определении.

**Множество** это объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются **элементами** образуемого ими множества.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.; а элементы множеств – строчными буквами: *a, b, c* и т.д. Простейший способ задания множества – перечисление элементов.

М={a1, a2, …, ak}, где

* M – наименование множества
* a1,a2,…,ak – запись о том, что множеству M принадлежит k штук элементов

М={9,4,7} – запись о том, что множеству M принадлежат числа 9, 4,7.

Элементы во множестве не упорядочены. Множество {1,2,3} это то же самое множество, что и {3,2,1}.

Элементы во множестве уникальны. Множество {1,2,2,2,3,3} следует записать как {1,2,3}.

Если объект *х* является элементом множества *М*, то говорят, что *х принадлежит М*: *х∈М.* В противном случае говорят, что *х не принадлежит М*: *х∉М.* Знак *∈* это сокращение от латинского слова *element*. Знак применяется только для связи элементов и множеств.

Стандартные числовые множества

* ℕ = {1,2,3,…} – множество натуральных чисел (natural)
* ℕ0 = {0,1,2,3,…}
* ℤ = {…,-2,-1,0,1,2,…}– все целые числа (zahlen – нем. "числа")
* ℚ – рациональные числа, могут быть выражены дробями (quoziente – итал. "дробь")
* ℝ – действительные числа (real)
* ℙ – множества простых чисел (prime)
* ∅ – пустое множество. Не содержит элементов.
* U – универсальное множество, содержащее все возможные элементы

Пример Х

|  |  |
| --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** |
| A = {9,2,8,3,7,4,6,5,2,1,0} | Множество цифр десятичной системы счисления |
| B = {2,3,7,11,13,17,19,23,29,31} | Множество из первых 10 простых чисел |
| МЕСЯЦЫ = {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь} | множество названий месяцев |
| ЗИМА = {декабрь, январь, февраль} | множество зимних месяцев |
| ГОРОДА = {Москва, Омск, Париж, Ялта} | множество городов |
| СТРАНЫ\_СОСЕДИ = {Норвегия, Финляндия, Эстония, Латвия, Литва, Польша, Белоруссия, Украина, Абхазия, Грузия, Южная Осетия, Азербайджан, Казахстан, Китай, Монголия, КНДР, Япония, США} | Множество стран, с которыми граничит Россия |
| Д6 = {1,2,3,4,5,6} | Множество возможных значений на игральном кубе с 6 гранями |
| РЕШЕНИЯ = {Камень, Ножницы, Бумага} | Возможные решения в игре Камень-ножницы-бумага |
| ИСХОДЫ = {победа игрока А, победа игрока Б, ничья} | Возможные исходы игры Камень-ножницы-бумага |
| СОСТОЯНИЯ = {ОК, ОШИБКА} | Возможные состояния программы |

## Высказывания

Цель: дать инструмент для описания множеств с помощью высказываний.

**Выска́зывание** в математической логике — предложение, выражающее суждение. Если суждение, составляющее содержание (смысл) некоторого высказывания, истинно, то и о данном высказывании говорят, что оно истинно. Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения. Истинность и ложность называются логическими, или истинностными, значениями высказываний.[Чупахин И.Я.,[Бродский И.Н.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%80%D0%BE%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9,_%D0%98%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%84_%D0%9D%D1%83%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87) Формальная логика. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1977. — 357 с.]

Пример Х

|  |  |
| --- | --- |
| **Высказывание** | **Истинно или ложно** |
| Москва входит в состав России | истинно |
| Омск входит в состав Франции | ложно |
| Если игрок А выбрал камень, а игрок Б – ножницы, то победит игрок А | истинно |

Множество можно задавать описанием свойств, которыми должны обладать его элементы. Таким способом можно задавать бесконечные множества.

М={x | P(x)}, где

* M – наименование множества
* х – условное обозначение любого из элементов множества
* P(x) – высказывание (характеристический предикат)

**Характеристический предикат** – это условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного аргумента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

Истинность или ложность предиката зависит от аргумента.

Москва входит в состав России – высказывание.

$город входит в состав России – предикат, в котором "$город" – аргумент.

Простейшие условия для числовых множеств:

* a больше b
* a меньше b
* a эквивалентно b (Равно)
* a больше или равно b
* a меньше или равно b
* a делится без остатка на b

Пример Х

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Пример** | **Расшифровка** |
|  | A = {a|a>0} | Числа больше 0 |
|  | B = {b|b<100} | Числа меньше 100 |
|  | C = {c|c%2==0} | Числа, которые делятся без остатка на 2 |
|  | ЦЕНЫ = {cost|cost>0} | Множество цен, которые должны быть больше 0 |

Даны фразы. Какие из них это предикаты, а какие – высказывания?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Фраза** | **Предикат/Высказывание** |
|  | В пятницу было солнечно | высказывание, предикат (т.к. нужно уточнить в какую именно пятницу) |
|  | программа не работает | предикат (какая именно программа?) |
|  | масса автомобиля больше 3 тонн | предикат |
|  | я сегодня пришел вовремя | высказывание |
|  | мы закончим занятие попозже | предикат (какое именно занятие) |

Даны предикаты, привести примеры, когда они ложны и когда истинны.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Предикат** | **Примеры истины** | **Примеры лжи** |
|  | Город входит в состав России | Москва, Омск, Саратов | Лондон, Амстердам, Нью-Йорк |
|  | Масса автомобиля больше 3 тонн | КамАЗ, ЗИЛ | Ока, Лада калина |
|  | 0<x | 3, 7, 11 | 0, -2, |
|  | y<100 | 71 | 173 |
|  | x%2==0 | 4 | 5 |
|  | c<=15 | 15 |  |

## Граничное значение

Граничное значение это пример максимального и минимального аргумента предиката, который превращается как в ложное высказывание, так и в истинное.

Частный случай граничного значения это пример элемента множества, который показывает разницу между строгим и нестрогим сравнением.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Предикат** | **Пример граничного значения** |
|  | 0<x | 0 |
|  | y<100 | 100 |
|  | x%2==0 | затруднение |
|  | c<=15 | 15 |

## Подмножества

Множество А называется **подмножеством** множества В, если всякий элемент из А является элементом В. Обозначается как A⊆ B.

Множество A называется **строгим (собственным) подмножеством** B, если A является подмножеством B и B не является подмножеством A. Обозначается как A⊂B.

Пример Х

A = {1,2,3,4}; B = {1,2,3,4,5}; C = {4,3,2,1}

Высказывания:

* A⊂B– истинно
* A⊆B – ложно
* B⊂A– ложно
* A⊆C истинно и C⊆A–истинно. Порядок элементов не важен.

Какие элементы из множества B отсутствуют во множестве A?

ЗИМА является подмножеством МЕСЯЦЫ. ЗИМА ⊂ МЕСЯЦЫ.

Но при этом МЕСЯЦЫ не являются подмножеством ЗИМА.

Множество фактических исходных данных для программы является подмножеством возможных исходных данных.

Истинно ли, что множество тестовых исходных данных это подмножество возможных исходных данных?

Истинно ли, что множество тестовых исходных данных это подмножество фактических исходных данных? (Нет, по факту некоторые случаи могут не встречаться на практике).

Дано: A = {9,8,7,6}, B = {8,6}, C = {5,7} a = 7, D = ∅

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Высказывание** | **Ответ** |
|  | C⊂A | ложно |
|  | B⊂A | истинно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | ложно |
|  | a∈C | истинно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | B∈A | ложно |

Дано: A = {a|0<a}, B = {b|b<50}, C = {c|75<c}, D = {d|d<=0}, x=15

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Высказывание** | **Ответ** |
|  | C⊂A | истинно |
|  | B⊂A | ложно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | x∈A | истинно |
|  | x∈B | истинно |
|  | x∈C | ложно |
|  | x∈D | ложно |
|  | D⊂C | истинно |
|  | B∈D | ложно |

## Логические операции

Цель: при выполнении операций над множествами, которые заданы как предикаты, нужно уметь писать высказывания с использованием логических операций конъюнкции, дизъюнкции и т.п.

Логическая операция это символ или слово, используемое для соединения двух или более высказываний так, что значение составного высказывания зависит от значений соединяемых высказываний и от значения операции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Порядок вычисления** | **Символ** | **Наименование** | **Описание** |
| 1 | ¬x | Отрицание | не х |
| 2 | a∧b | Конъюнкция | a и b |
| 3 | a∨b | Дизъюнкция | a или b |
| 3 | a⊕b | Строгая дизъюнкция | либо a либо b |
| 4 | a→b | Импликация | если a, то b |
| 5 | a↔b | Эквиваленция | a то же самое, что b |

Для описания логических операций используют таблицы истинности.

Таблица истинности отрицания

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **¬x** |
| истина | ложь |
| ложь | истина |

Таблица истинности конъюнкции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Исходные данные** | | **конъюнкция** | **дизъюнкция** | **строгая дизъюнкция** | **импликация** | **эквиваленция** |
| **a** | **b** | **a∧b** | **a∨b** | **a⊕b** | **a→b** | **a↔b** |
| истина | истина | истина | истина | ложь | истина | истина |
| истина | ложь | ложь | истина | истина | истина | ложь |
| ложь | истина | ложь | истина | истина | ложь | ложь |
| ложь | ложь | ложь | ложь | ложь | истина | истина |

Примеры:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** | **Способ записи** |
| ДНИ\_ЯНВ = {d|d∈ℕ ∧ 1<=d ∧ d>=31} | множество номеров дней января | предикат |
| ЧЕТ = {x | x>=0 ∧ x%2==0} | множество четных чисел | предикат |
| Y = {y | y делится на 4 без остатка} | множество високосных годов | предикат |

Даны предикаты:

* привести примеры, когда оно ложно и когда истинно;
* привести примеры граничных значений.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Предикат** | **Примеры истины** | **Примеры лжи** | **Граничные значения** |
|  | 0<x ∧ x<100 | 20, 49, 87 | -13, 125, -50, 294 | 0, 100 |
|  | 20<x ∧ 50<x | 100, 60 | 15, 0, -3, 30 | 20, 21, 50, 51, |
|  | 13<x ∨ x<67 | 0, 50, 100 | - | 13, 14, 66, 67 |
|  | 17<x ∨ 81<x | 20, 60, 100 | 10, -5, 0 | 17, 18, 81, 82 |
|  | x<34 ∧ 75<x | - | 0, 40, 80 | 33, 34, 75, 76 |
|  | x<9 ∨ 41<x | -10, 0 | 45, 90 | 8, 9, 41, 42 |
|  | x<-58 ∧ x<-48 |  |  |  |
|  | -17<x ∧ x<48 ∧ 115<x |  |  |  |
|  | -45<x ∧ x<-4 ∧ x<-13 |  |  |  |
|  | x<34 ∧ x<82 ∧ -72<x |  |  |  |
|  | x<34 ∧ 120<x ∧ -72<x |  |  |  |
|  | x<7 ∧ -73<x ∧ 79<x |  |  |  |
|  | 77<x ∧ -36<x ∧ x<35 |  |  |  |
|  | x<35 ∧ -36<x ∧ x<-3 |  |  |  |
|  | x<28 ∧ 141<x ∧ x<94 |  |  |  |
|  | x<-3 ∧ 77<x ∧ x<35 |  |  |  |
|  | x<-53 ∧ -62<x ∧ 140<x |  |  |  |
|  | x<-21 ∧ -33<x ∧ x<69 |  |  |  |
|  | 106<x ∧ -33<x ∧ x<-21 |  |  |  |

Рассмотрим два определения равенства множеств.

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут А=В, А≠В – в противном случае.*

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, еслиA*⊆ Bи B ⊆ A

Определение. Мощность конечного множества А - это число его элементов.

Мощность множества обозначают |A|.

Пример Х

|∅|=0, |{1,3,5,7}|=4; |{2,4,6}|=3 |ℕ | = ∞

*Определение. Множества называются* ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

*Определение. Множество всех подмножеств множества А называется* ***булеаном*** *P(A).*

Известно, что если множество *А* содержит *n* элементов, то множество *P(A)* содержит *2n* элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества *А* в виде *2А*.

Пример Х

*А={0, 1, 2}, P(A)={ ∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}*

## Графическое изображение множеств

Существует несколько способов графически изобразить множества:

1. Диаграммы Эйлера-Венна
2. Диаграммы на координатной прямой или плоскости

Построение диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество *U*, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств.Фигуры должны быть соответствующим образом обозначены.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Математическое обозначение |
| A  a  b  U | a∈A  b*∉*A  a∈U  b∈U  A⊂U |
| A  B  C  U  D | B⊂A  C⊄A  D⊆A  B⊂D  C⊄D  A⊂U  B⊂U  C⊂U  D⊂U |

Диаграммы на координатной прямой используются для изображения числовых множеств. Построение диаграммы заключается в изображении линии со стрелкой, которая обозначает числовую прямую. Каждая точка такой прямой обозначает какое-то число. Чем ближе число к стрелке, тем больше оно. Множества обозначаются дугами. Если множество задано неравенством, то на оси отмечается граница неравенства.Для строгого неравенства на границе ставится выколотая точка. Для нестрогого – закрашенная.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма на координатной прямой | Множество |
|  | A = {x|x<13} |
|  | B = {x|x>0} |

## Операции над множествами

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих. При этом для задания новых множеств с помощью предикатов потребуется использовать логические операторы.

Для иллюстрации операций над множествами и для решения задач фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Определение |
| *Рис. 1.* | Определение. **Объединением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В (рис. 1):  A∪B={x|x∈A ∨ x∈B} |
| *Рис. 2.* | *Определение.* ***Пересечением*** *множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В (рис. 2):*  A∩B={x|x∈A ∧ x∈B} |
| *Рис. 3.* | *Определение.* ***Разностью*** *множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В (рис. 3):*  A\B={x|x∈A ∧ ¬(x∈B)}  A\B={x|¬(x∈A → x∈B)} |
| *Рис. 4.* | *Определение.* ***Симметрической разностью*** *множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В (рис. 4):*  AΔB = {x | x∈A ⊕ x∈B} |
| *Рис. 5.* | *Определение.* ***Абсолютным дополнением*** *множества А называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству А (рис. 5):* |

Пример Х. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения  (рис. 6).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| B∪C | A⋂(B∪C) |  |
| A⋂B | A⋂C | (A⋂B)∪(A⋂C) |

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Задачи:

A = {1,5,10,15}; B={5,7,9,11};C = {1,2,3}; D=∅

Вычислить:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Выражение** | **Ответ** |
|  | A ∩ B | 5 |
|  | A ∩ C | 1 |
|  | B ∩ C | ∅ |
|  | A ∩ D | ∅ |
|  | A ∩ A | A |
|  | A ∪ B | {1,5,7,9,10,11,15} |
|  | B ∪ C | {1,2,3,5,7,9,11} |
|  | A ∪ D | A |
|  | A ∩ B ∪ C | {1,2,3,5} |
|  | (B ∪ C) ∩A | {1,5} |
|  | A \ C | {5,10,15} |
|  | A \ B | {1,10,15} |
|  | A \ D | A |
|  | A \ (B ∪ C) | {10,15} |
|  | !A ∩ B | {7, 9, 11} |
|  | !B ∩ C | {1,2,3} |

Дано:

A = {10,-2,3,7,1,6,2,5,-9,8,-5,9,-7,4,-10} случмежду(-10;10)

B = {17,14,12,3,13,1,11,4,10,20,15,18,9,7,19,6} случмежду(0;20)

С = {16,20,12,17,13,26,24,11,21,14,23,27,30,15} случмежду(10;30)

D = {24,16,6,17,9,20,10,12,7,15,25,5,11,14,19,18} случмежду(5;25)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | Выражение | Результат |
|  | A ∩ B | {3,1,4,10,9,7,6} |
|  | A ∩ C | ∅ |
|  | A ∩ D | {6,9,10,7,5} |
|  | B ∩ C | {20,12,17,13,11,14,15} |
|  | B ∩ D | {6,17,9,20,10,12,7,15,11,14,19,18} |
|  | C ∩ D | {24,16,17,20,12,15,11,14} |

A = {x|0<x}; B = {x|x<100}; C = {x|50<x}; D = {x|75<x};a=25

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Выражение** | **Ответ** |
|  | !A | {x|x<=0} |
|  | !B | {x|100<=x} |
|  | A∩B | {x|0<x ∧ x<100} |
|  | A∩C | {x|0<x} |
|  | B∩C | {x|50<x ∧ x<100} |
|  | !A∩B | {x|x<=0} |
|  | A∩!C | {x|0<x ∧ x<=50} |
|  | D∩B | {x|75<x ∧ x<100} |
|  | !A∩C | ∅ |
|  | A∪C | {x|0<x} |
|  | (A∩!C)∪(B∩D) | {x|0<x ∧ x<=50 ∨ 75<x ∧ x<100} |
|  | A∪(B∩C) | {x|0<x} |
|  | (A∩B)\C | {x|0<x<=50} |
|  | B\(C∩!D) | {x|x<=50 ∨ 75<=x ∧ x<100} |
|  | A∪!B | {x|0<x} |
|  | C∪D | {x|50<x} |
|  | D∩!B | {x|100<=x} |

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Утверждение** | **Ответ** |
|  | C⊂A | истинно |
|  | B⊂A | ложно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | истинно |
|  | a∈C | ложно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | !B⊂C | истинно |
|  | !D⊂A | ложно |
|  | A∩B⊂B∩C | истинно |
|  | A∪!A⊆B∪!B | истинно |

Опишите множество возможных значений x, при которых выражение вычислимо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Выражение** | **Ответ** |
|  |  | {x|x!=0} |
|  |  | {x|0<=x} |
|  |  | {x|x<=10} |
|  |  | {x|-5<=x} |
|  |  | {x|-7<=x<=10} |
|  |  | {x|-3<=x<0|0<=x} |

## Основные тождества алгебры множеств

Цель – научить упрощать выражения.

Для произвольных множеств А, В, и С справедливы следующие соотношения (табл. 1):

*Таблица Х*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Коммутативность объединения | 2. Коммутативность пересечения |
| 3. Ассоциативность объединения | 4. Ассоциативность пересечения |
| 5. Дистрибутивность объединения относительно пересечения | 6. Дистрибутивность пересечения относительно объединения |
| 7. Законы действия с пустым и универсальным множествами | 8. Законы действия с пустым и универсальным множествами |
| 9. Закон идемпотентности объединения | 10. Закон идемпотентности пересечения |
| 11. Закон де Моргана | 12. Закон де Моргана |
| 13. Закон поглощения | 14. Закон поглощения |
| 15. Закон склеивания | 16. Закон склеивания |
| 17. Закон Порецкого | 18. Закон Порецкого |
| 19. Закон двойного дополнения |  |

## Кортеж. Связь понятий кортежи множество

*Определение. Кортеж – множество элементов, расположенных в определенном порядке.Обозначается маленькими буквами.*

*Пустой кортеж это пустое множество.*<> = ∅

*Определение.****Упорядоченная пара****<x, y>- кортеж длины 2.*

Кортеж длины 3 (тройка) может быть определен как пара, вложенная в другую пару.

<z,<x,y>> = <z,x,y>

Кортеж длины 4 может быть определен 3 рекурсивно вложенными парами.

<w,<z,<x,y>>>

Свойства:

* Кортежи равны, если равны элементы на одинаковых позициях.  
  <a1,a2,…,an> = <b1,b2,…,bn>тогда и только тогда, когда a1=b1,a2=b2,…,an=bn.
* Кортеж может содержать несколько одинаковых элементов.  
  <1,2,2,3>!=<1,2,3>
* Элементы кортежей упорядочены.  
  <1,2,3> = <1,2,3>, но <1,2,3>!=<3,2,1>

Кортежи содержат конечное количество элементов. Причина: для создания кортежа бесконечной длины потребуется бесконечное количество действий.

Дано:

* A={<1,2>,<4,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={<x,y>|x<=2 ∧ y>0};
* D={<x,y>|x>0 ∧ y<=3}

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Выражение** | **Ответ** |
|  | A∩C | {<1,2>,<2,3>,<1,5>} |
|  | B∩D | {<1,3>,<2,3>} |
|  | A∩B | {<2,3>} |
|  | A∩{<x,y>|x>y} | {<4,2>,<0,-3>} |

Дан предикат, привести примеры граничных значений.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Предикат** | **Пример истины** | **Примеры лжи** | **Граничные значения** |
|  | x>0 |  |  |  |
|  | y<100 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | y<=4 ∧ 1<=x ∧ x<=2 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

## Прямое произведение

**Прямым произведением множеств** X и Y называется множество X×Y , элементами которого являются все возможные кортежи<x, y>, такие, что x∈X, y∈Y.

Пример Х

1. Пусть X={1, 2, 3}, Y={0, 1}.  
   Тогда X×Y={<1,0>,<1,1>,<2,0>,<2,1>,<3,0>,<3,1>},  
   Y×X = {<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,1>,<1,2>,<1,3>}
2. Пусть Х – множество точек отрезка [0, 1], а Y – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда X× Y - множество точек квадрата [0,1] ×[1,2] с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2).
3. Пусть Bx={истина, ложь} значения ячеек в таблице истинности   
   тогда таблица истинности для двух переменных будет содержать такие значения B1×B2={<и,и>,<и,л>,<л,и>,<л,л>}  
   а таблица истинности для трех переменных будет содержать такие значения B1×B2×B3={<и,и,и>,<и,л,и >,<л,и,и >,<л,л,и >,  
   <и,и,л >,<и,л,л >,<л,и,л >,<л,л,л >}

Вычислить A×B

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **A** | **B** | **Ответ** |
|  | {2,3,4,7,9} | {9,8,5,4} | {<2,9>,<2,8>,<2,5>,<2,4>,<3,9>,<3,8>,<3,5>,<3,4>,<4,9>,<4,8>,<4,5>,<4,4>,<7,9>,<7,8>,<7,5>,<7,4>,<9,9>,<9,8>,<9,5>, <9,4>} |
|  | {2,7,0} | {1,4} | {<2,1>,<2,4>,<7,1>,<7,4>,<0,1>,<0,4>} |
|  | {3,15} | {8,9,0,5} | {<3,8>,<3,9>,<3,0>,<3,5>,<15,8>,<15,9>,<15,0>,<15,5>} |
|  | {140,165} | {665,248,186,963} | {<140,665>,<140,248>,<140,186>,<140,963>,<165,665>, <165,248>,<165,186>,<165,963>} |

Дано:

* A={<1,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={x|x<=2};
* D={y|y<=3}

| **№** | **Выражение** | **Ответ** |
| --- | --- | --- |
|  | C×D | {<x,y>|x<=2∧y<=3} |
|  | D×C | {<x,y>|x<=3∧y<=2} |
|  | D×D | {<x,y>|x<=3∧y<=3} |
|  | C×!D | {<x,y>|x<=2∧3<y} |
|  | A∩C×D | {<1,2>,<2,3>,<0,-3>} |
|  | B∩!C×C | {<x,y>|x<=2 ∧ 2<y}  {<1,3>,<2,3>,<1,5>} |
|  |  |  |

Дано: РЕШЕНИЯ = {Камень, Ножницы, Бумага}

Выписать множество возможных ситуаций в игре.

СИТУАЦИИ = {<решение игрока А, решение игрока Б> | решение игрока А∈РЕШЕНИЯ, решение игрока Б∈РЕШЕНИЯ} = РЕШЕНИЯ×РЕШЕНИЯ

СИТУАЦИИ = {<Камень, Камень>, <Камень, Ножницы>, <Камень, Бумага>, <Ножницы, Камень>,<Ножницы, Ножницы>,<Ножницы, Бумага>, <Бумага, Камень>, <Бумага, Ножницы>, <Бумага, Бумага>}

Описать множество выигрышных ситуаций для первого игрока

Дано графическое изображение множества. Сформулировать высказывание для описания множества. Сформулировать области эквивалентности на каждой оси. Привести примеры значений множества для заполнения таблицы истинности высказывания.

| **Изображение** | **Высказывание и примеры** | |
| --- | --- | --- |
|  | P(x,y) = x<=-2 ∧ y>=1   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | x | x<=-2 | -3 | | x | -2<x | 0 | | y | y<1 | 0 | | y | 1<=y | 2 |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | x<=-2 | y>=1 | x<=-2 ∧ y>=1 | | -3 | 2 | и | и | и | | -3 | 0 | и | л | л | | 0 | 2 | л | и | л | | 0 | 0 | л | л | л | | |
|  | P(x,y) = y<=1.5 ∧ y >=-2   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | 1.5<y | 2 | | y | y<=1.5 ∧ y >=-2 | 0 | | y | y<-2 | -3 |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | y | y<=1.5 | y >=-2 | x<=-2 ∧ y>=1 | | 2 | л | и | л | | 0 | и | и | и | | -3 | и | л | л | | |
|  | P(x,y) = y<=4 ∧ 1<=x ∧ x<=2   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | 4<y | 0 | | y | y<=4 | 5 | | x | x<1 | 0 | | x | 1<=x ∧ x<=2 | 1.5 | | x | 2<=x | 3 |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | Z | W | U |  |  | | y<=4 | 1<=x | x<=2 | Z∧W | P(x,y) | | 1.5 | 0 | и | и | и | и | и | | 3 | 0 | и | и | л | и | л | | 0 | 0 | и | л | и | л | л | | 1.5 | 5 | л | и | и | л | л | | 3 | 5 | л | и | л | л | л | | 0 | 5 | л | л | и | л | л | | |
|  | P(x,y) = 2<=y ∧ y<=4 ∧ 1<=x   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | 4<y | 5 | | y | 2<=y ∧ y<=4 | 3 | | y | y<2 | 0 | | x | x<1 | 0 | | x | 1<=x | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | Z | W | U |  |  | | 2<=y | y<=4 | 1<=x | Z∧W | P(x,y) | | 2 | 3 | и | и | и | и | и | | 0 | 3 | и | и | л | и | л | | 2 | 5 | и | л | и | л | л | | 0 | 5 | и | л | л | л | л | | 2 | 0 | л | и | и | л | л | | 0 | 0 | л | и | л | л | л | | |
|  | P(x,y) = 2<=x ∧ 0<=y ∨ y<=-1 ∧ 1<=x   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | y<-1 | -2 | | y | -1<y ∧ y<0 | -0.5 | | y | 0<=y | 1 | | x | x<1 | 0 | | x | 1<=x ∧ x<2 | 1.5 | | x | 2<=x | 3 |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | 2<=x | 0<=y | y<=-1 | 1<=x | P(x,y) | | 0 | -2 | л | л | и | л | л | | 0 | -0.5 | л | л | л | л | л | | 0 | 1 | л | и | л | л | л | | 1.5 | -2 | л | л | и | и | и | | 1.5 | -0.5 | л | л | л | и | л | | 1.5 | 1 | л | и | л | и | л | | 3 | -2 | и | л | и | и | и | | 3 | -0.5 | и | л | л | и | л | | 3 | 1 | и | и | л | и | и | | |
|  | | P(x,y) = 2<=x ∧ 1<=y ∨ 2<=x ∧ y <=-1.5   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | 1<=y | 2 | | y | -1.5<y ∧ y<1 | 0 | | y | y<=-1.5 | -3 | | x | 2<=x | 4 | | x | x<2 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | 2<=x | 1<=y | y<=-1.5 | P(x,y) | | 4 | 2 | и | и | л | и | | 4 | 0 | и | л | л | л | | 4 | -3 | и | л | и | и | | 1 | 2 | л | и | л | л | | 1 | 0 | л | л | л | л | | 1 | -3 | л | л | и | л | |
|  | | P(x,y) = 1<=x ∧ x<=3 ∧ -2<=y ∧ y<=-1   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | -1<y | 0 | | y | -2<=y ∧ y<=-1 | -1.5 | | y | y<-2 | -3 | | x | x<1 | -1 | | x | 1<=x ∧ x<=3 | 2 | | x | 3<x | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | 1<=x | x<=3 | -2<=y | y<=-1 | P(x,y) | | -1 | 0 | л | и | и | л | л | | -1 | -1.5 | л | и | и | и | л | | -1 | -3 | л | и | л | и | л | | 2 | 0 | и | и | и | л | л | | 2 | -1.5 | и | и | и | и | и | | 2 | -3 | и | и | л | и | л | | 4 | 0 | и | л | и | л | л | | 4 | -1.5 | и | л | и | и | л | | 4 | -3 | и | л | л | и | л | |
|  | | P(x,y) = 2<=x ∨ 0.5<=y ∧ y<=1.5   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Ось | Область | Пример | | y | 1.5<y | 2 | | y | 0.5<=y ∧ y<=1.5 | 1 | | y | y<0.5 | 0 | | x | x<2 | 3 | | x | 2<=x | -1 |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | x | y | 2<=x | 0.5<=y | y<=1.5 | P(x,y) | | 3 | 2 | и | и | л | и | | 3 | 1 | и | и | и | и | | 3 | 0 | и | л | и | и | | -1 | 2 | л | и | л | л | | -1 | 1 | л | и | и | и | | -1 | 0 | л | л | и | л | |

## Отношения

*Определение.****Бинарным****(или двуместным)****отношениемr****называется множество кортежей.*

Если *r* есть отношение и пара *<x, y>* принадлежит этому отношению, то наряду с записью *<x, y>Îr* употребляется запись *xry*. Элементы *х* и *у* называются координатами (или компонентами) отношения *r*.

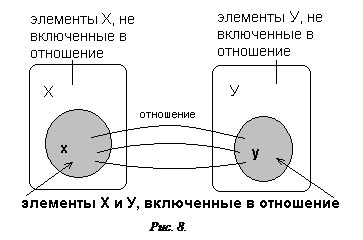
*Определение.****N-арным отношением****называется множество упорядоченных n-ок.*

*Определение.****Областью определения****бинарного отношения r называется множество image107*

*Определение.****Областью значений****бинарного отношения r называется множество image109*

Пусть *rÍ X´Y*определено в соответствии с изображением на рисунке 8 . Область определения *Dr* и область значений *Er* определяются соответственно:

*Dr={x: (x, y) Î r}, Er={y: (x,y)Î r}.*



Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств.Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент *cij*, стоящий на пересечении *i*-той строки и *j*-го столбца, равен 1, если *ai* и *aj* имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

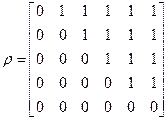
*Пример 8.*

Пусть M={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение *r*, заданное на множестве MrM , если r означает «быть строго меньше».

Отношение *r* как множество содержит все пары элементов *a, b* из *М* такие, что *a<b*. Тогда

*r = {(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}.*

Матрица отношения имеет вид:

 .

## Симметричность, Рефлексивность, Транзитивность

Цель: научиться выбирать минимум примеров для тестирования программного обеспечения. Проверять, принадлежат ли примеры одному и тому же классу эквивалентности.

## Функции

*Определение. Бинарное отношение f называется****функцией****, если из <x, y> и <x, z> следует, что y=z.*

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции *f* и *g* равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается *Df*, а область значений – *Rf*. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если *f* – функция, то вместо *<x, y>Îf* пишут *y=f(x)* и говорят, что *y* – значение, соответствующее аргументу *х*, или *y* – образ элемента *х* при отображении *f*. При этом *х* называется прообразом элемента *y*.

*Определение. Назовем f****n-местной функцией****из Х в Y если f:XnRY. Тогда пишем y=f(x1, x2, …, xn) и говорим, что y – значение функции при значении аргументов x1, x2, …, xn.*

*Способ задания множества -* ***Порождающая процедура****: M={ x | x=f}, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов*. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

## Свойства функций

Пусть *f:XrY.*

*Определение. Функция f называется****инъективной****, если для любых х1, х2, y из y=f(x1) и y=f(x2) следует, что x1=x2, то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*

*Определение. Функция f называется****сюръективной****, если для любого элемента yÎY существует элемент хÎХ такой, что y=f(x).*

*Определение. Функция f называется****биективной****, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

Рисунок 9 иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

*Пример 9.*

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

1. функция *f(x)=ex* - инъективна, но не сюръективна;
2. функция *f(x)=x3-x* – сюръективна, но не инъективна;
3. функция *f(x)=2x+1* – биективна.

*Определение.****Суперпозиция функций****– функция, полученная из системы функций f, f1, f2, …, fk некоторой подстановкой функций f1, f2, …, fk во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.*

Пример 10.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

*Источники:*

<https://life-prog.ru/2_54722_nachalnie-ponyatiya-teorii-mnozhestv.html>

<https://stepik.org/course/83>

<http://mathprofi.net/mnozhestva.html>