Оглавление

[ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ 1](#_Toc20934942)

[НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 2](#_Toc20934943)

[Элементы и множества 2](#_Toc20934944)

[Высказывания 3](#_Toc20934945)

[Логические операции 3](#_Toc20934946)

[Графическое изображение множеств 5](#_Toc20934947)

[Операции над множествами 6](#_Toc20934948)

[Основные тождества алгебры множеств 9](#_Toc20934949)

[Кортеж. Связь понятий кортеж и множество 11](#_Toc20934950)

[Прямое произведение 11](#_Toc20934951)

[Отношения 12](#_Toc20934952)

[Функции 13](#_Toc20934953)

[Свойства функций 14](#_Toc20934954)

# ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика, или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин «конечная математика». Можно считать общепринятым деление математики на непрерывную и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Поэтому для задач дискретной математики обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная математика.

При исследовании, анализе и решении управленческих проблем, моделировании объектов исследования и анализа широко используются дискретные методы формализованного представления, являющиеся предметом рассмотрения в дискретной математике. К ним относятся методы, основанные на теоретико-множественных представлениях, графы, алгоритмы, математическая логика и др.

Дискретная математика предлагает:

* универсальные средства (языки) формализованного представления;
* способы корректной переработки информации, представленной на этих языках;
* возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательной ценности моделей.

Сегодня дискретная математика является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

# НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## Элементы и множества

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Философам давно ясно, что мир – единое неразрывное целое, и выделение в нем объектов – это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину. Но как бы там ни было, выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому не удивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов. Для определенности остановимся на следующем определении.

*Определение. Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.*

Элементы во множестве не упорядочены. Если объект *х* является элементом множества *М*, то говорят, что *х принадлежит М*: *х∈М.* В противном случае говорят, что *х не принадлежит М*: *х∉М.* Знак *∈* это сокращение от латинского слова *element*. Знак применяется только для связи элементов и множеств.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.; а элементы множеств – строчными буквами: *a, b, c* и т.д. Простейший способ задания множества – перечисление элементов.

М={a1, a2, …, ak}, где

* M – наименование множества
* a1,a2,…,ak – запись о том, что множеству M принадлежит k штук элементов

М={9,4,7} – запись о том, что множеству M принадлежат числа 9, 4,7.

Стандартные числовые множества

* ℕ = {1,2,3,…} – множество натуральных чисел (natural)
* ℕ0 = {0,1,2,3,…}
* ℤ = {…,-2,-1,0,1,2,…}– все целые числа (zahlen – нем. "числа")
* ℚ – рациональные числа, могут быть выражены дробями (quoziente – итал. "дробь")
* ℝ – действительные числа (real)
* ℙ – множества простых чисел (prime)
* ∅ – пустое множество. Не содержит элементов.
* U – универсальное множество, содержащее все возможные элементы

Пример Х

|  |  |
| --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** |
| A = {9,2,8,3,7,4,6,5,2,1,0} | Множество цифр десятичной системы счисления |
| B = {2,3,7,11,13,17,19,23,29,31} | Множество из первых 10 простых чисел |
| МЕСЯЦЫ = {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь} | множество названий месяцев |
| ЗИМА = {декабрь, январь, февраль} | множество зимних месяцев |

## Высказывания

Цель: дать инструмент для описания множеств с помощью высказываний.

Определение: Выска́зывание в математической логике — предложение, выражающее суждение. Если суждение, составляющее содержание (смысл) некоторого высказывания, истинно, то и о данном высказывании говорят, что оно истинно. Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения. Истинность и ложность называются логическими, или истинностными, значениями высказываний.[Чупахин И.Я.,[Бродский И.Н.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%80%D0%BE%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9,_%D0%98%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%84_%D0%9D%D1%83%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87) Формальная логика. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1977. — 357 с.]

Множество можно задавать описанием свойств, которыми должны обладать его элементы. Таким способом можно задавать бесконечные множества.

М={x | P(x)}, где

* M – наименование множества
* х – условное обозначение любого из элементов множества
* P(x) – высказывание (характеристический предикат)

Характеристический предикат – это условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

Пример Х

|  |  |
| --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** |
| A = {x|x>0} | Числа больше 0 |
| B = {y|y<100} | Числа меньше 100 |
| C = {y|x%2==0} | Числа, которые делятся без остатка на 2 |

## Подмножества

*Определение. Множество А называется* ***подмножеством*** *множества В, если всякий элемент из А является элементом В. Обозначается как A*⊆ B.

*Определение. Множество A называется* ***строгим (собственным) подмножеством****B, если A является подмножеством B и B не является подмножеством A. Обозначается как A*⊂*B.*

Пример 3.

A = {1,2,3,4}; B = {1,2,3,4,5}; C = {4,3,2,1}

Высказывания:

* A⊂B– истинно
* A⊆B – ложно
* B⊂A– ложно
* A⊆C истинно и C⊆A–истинно. Порядок элементов не важен.

Какие элементы из множества B отсутствуют во множестве A?

ЗИМА является подмножеством МЕСЯЦЫ. ЗИМА ⊂ МЕСЯЦЫ.

Но при этом МЕСЯЦЫ не являются подмножеством ЗИМА.

Задачи:

A = {9,8,7,6}, B = {8,6}, C = {5,7} a = 7, D = ∅

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Утверждение | Ответ |
|  | C⊂A | ложно |
|  | B⊂A | истинно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | ложно |
|  | a∈C | истинно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | B∈A | ложно |

Дано: A = {a|0<a}, B = {b|b<50}, C = {c|75<c}, D = {d|d<=0}, x=15

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Утверждение | Ответ |
|  | C⊂A | истинно |
|  | B⊂A | ложно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | x∈A | истинно |
|  | x∈B | истинно |
|  | x∈C | ложно |
|  | x∈D | ложно |
|  | D⊂C | истинно |
|  | B∈D | ложно |

## Логические операции

Цель: при выполнении операций над множествами, которые заданы как предикаты, нужно уметь писать высказывания с использованием логических операций конъюнкции, дизъюнкции и т.п.

Логическая операция это символ или слово, используемое для соединения двух или более высказываний так, что значение составного высказывания зависит от значений соединяемых высказываний и от значения операции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Порядок вычисления | Символ | Наименование | Описание |
| 1 | ¬x | Отрицание | не х |
| 2 | a∧b | Конъюнкция | a и b |
| 3 | a∨b | Дизъюнкция | a или b |
| 3 | a⊕b | Строгая дизъюнкция | либо a либо b |
| 4 | a→b | Импликация | если a, то b |
| 5 | a↔b | Эквиваленция | a то же самое, что b |

Для описания логических операций используют таблицы истинности.

Таблица истинности отрицания

|  |  |
| --- | --- |
| x | ¬x |
| истина | ложь |
| ложь | истина |

Таблица истинности конъюнкции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходные данные | | конъюнкция | дизъюнкция | строгая дизъюнкция | импликация | эквиваленция |
| a | b | a∧b | a∨b | a⊕b | a→b | a↔b |
| истина | истина | истина | истина | ложь | истина | истина |
| истина | ложь | ложь | истина | истина | истина | ложь |
| ложь | истина | ложь | истина | истина | ложь | ложь |
| ложь | ложь | ложь | ложь | ложь | истина | истина |

Примеры:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** | **Способ записи** |
| ДНИ\_ЯНВ = {d | x от 1 до 31 вкл.} | множество номеров дней января | предикат |
| ЧЕТ = {x | x>= 0 и x делится на 2 без остатка} | множество четных чисел | предикат |
| Y = {y | y делится на 4 без остатка} | множество високосных годов | предикат |

Рассмотрим два определения равенства множеств.

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут А=В, А≠В – в противном случае.*

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, еслиA*⊆ Bи B ⊆ A

Определение. Мощность конечного множества А - это число его элементов.

Мощность множества обозначают |A|.

Пример 4.

|∅|=0, |{1,3,5,7}|=4; |{2,4,6}|=3 |ℕ | = ∞

*Определение. Множества называются* ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

*Определение. Множество всех подмножеств множества А называется* ***булеаном*** *P(A).*

Известно, что если множество *А* содержит *n* элементов, то множество *P(A)* содержит *2n* элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества *А* в виде *2А*.

Пример 5.

*А={0, 1, 2}, P(A)={ ∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}*

## Графическое изображение множеств

Существует несколько способов графически изобразить множества:

1. Диаграммы Эйлера-Венна
2. Диаграммы на координатной прямой или плоскости

Построение диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество *U*, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств.Фигуры должны быть соответствующим образом обозначены.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Математическое обозначение |
| A  a  b  U | a∈A  b*∉*A  a∈U  b∈U  A⊂U |
| A  B  C  U  D | B⊂A  C⊄A  D⊆A  B⊂D  C⊄D  A⊂U  B⊂U  C⊂U  D⊂U |

Диаграммы на координатной прямой используются для изображения числовых множеств. Построение диаграммы заключается в изображении линии со стрелкой, которая обозначает числовую прямую. Каждая точка такой прямой обозначает какое-то число. Чем ближе число к стрелке, тем больше оно. Множества обозначаются дугами. Если множество задано неравенством, то на оси отмечается граница неравенства.Для строгого неравенства на границе ставится выколотая точка. Для нестрогого – закрашенная.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма на координатной прямой | Множество |
|  | A = {x|x<13} |
|  | B = {x|x>0} |

## Операции над множествами

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих. При этом для задания новых множеств с помощью предикатов потребуется использовать логические операторы.

Для иллюстрации операций над множествами и для решения задач фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Определение |
| *Рис. 1.* | Определение. **Объединением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В (рис. 1):  A∪B={x|x∈A ∨ x∈B} |
| *Рис. 2.* | *Определение.* ***Пересечением*** *множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В (рис. 2):*  A∩B={x|x∈A ∧ x∈B} |
| *Рис. 3.* | *Определение.* ***Разностью*** *множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В (рис. 3):*  A\B={x|x∈A ∨ ¬(x∈B)}  A\B={x|¬(x∈A → x∈B)} |
| *Рис. 4.* | *Определение.* ***Симметрической разностью*** *множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В (рис. 4):*  AΔB = {x | x∈A ⊕ x∈B} |
|  | *Определение: Декартово произведение множество*  *A×B = {(a,b) | a*∈*A, b*∈*B}* |
| *Рис. 5.* | *Определение.* ***Абсолютным дополнением*** *множества А называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству А (рис. 5):* |

Пример 6. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения  (рис. 6).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| B∪C | A⋂(B∪C) |  |
| A⋂B | A⋂C | (A⋂B)∪(A⋂C) |

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Задачи:

A = {1,5,10,15}; B={5,7,9,11};C = {1,2,3}; D=∅

Вычислить:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | A ∩ B | 5 |
|  | A ∩ C | 1 |
|  | B ∩ C | ∅ |
|  | A ∩ D | ∅ |
|  | A ∩ A | A |
|  | A ∪ B | {1,5,7,9,10,11,15} |
|  | B ∪ C | {1,2,3,5,7,9,11} |
|  | A ∪ D | A |
|  | A ∩ B ∪ C | {1,2,3,5} |
|  | (B ∪ C) ∩A | {1,5} |
|  | A \ C | {5,10,15} |
|  | A \ B | {1,10,15} |
|  | A \ D | A |
|  | A \ (B ∪ C) | {10,15} |
|  | !A ∩ B | {7, 9, 11} |
|  | !B ∩ C | {1,2,3} |

A = {x|0<x}; B = {x|x<100}; C = {x|50<x}; D = {x|75<x};a=25

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | !A | {x|x<=0} |
|  | !B | {x|100<=x} |
|  | A∩B | {x|0<x<100} |
|  | A∩C | {x|0<x} |
|  | B∩C | {x|50<x<100} |
|  | !A∩B | {x|x<=0} |
|  | A∩!C | {x|0<x<=50} |
|  | D∩B | {x|75<x<100} |
|  | !A∩C | ∅ |
|  | A∪C | {x|0<x} |
|  | (A∩!C)∪(B∩D) | {x|0<x<50;75<x<100} |
|  | A∪(B∩C) | {x|0<x} |
|  | (A∩B)\C | {x|0<x<=50} |
|  | B\(C∩!D) | {x|x<=50;75<=x<100} |
|  | A∪!B | {x|0<x} |
|  | C∪D | {x|50<x} |
|  | D∩!B | {x|100<=x} |

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Утверждение | Ответ |
|  | C⊂A | истинно |
|  | B⊂A | ложно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | истинно |
|  | a∈C | ложно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | !B⊂C | истинно |
|  | !D⊂A | ложно |
|  | A∩B⊂B∩C | истинно |
|  | A∪!A⊆B∪!B | истинно |

Опишите множество возможных значений x, при которых выражение вычислимо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  |  | {x|x!=0} |
|  |  | {x|0<=x} |
|  |  | {x|x<=10} |
|  |  | {x|-5<=x} |
|  |  | {x|-7<=x<=10} |
|  |  | {x|-3<=x<0|0<=x} |

## Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств А, В, и С справедливы следующие соотношения (табл. 1):

*Таблица 1*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Коммутативность объединения | 1’. Коммутативность пересечения |
| 2. Ассоциативность объединения | 2’. Ассоциативность пересечения |
| 3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения | 3’. Дистрибутивность пересечения относительно объединения |
| 4. Законы действия с пустым и универсальным множествами | 4’. Законы действия с пустым и универсальным множествами |
| 5. Закон идемпотентности объединения | 5’. Закон идемпотентности пересечения |
| 6. Закон де Моргана | 6’. Закон де Моргана |
| 7. Закон поглощения | 7’. Закон поглощения |
| 8. Закон склеивания | 8’. Закон склеивания |
| 9. Закон Порецкого | 9’. Закон Порецкого |
| 10. Закон двойного дополнения | |

Пример 7.

Доказать следующее тождество .

*Решение.*

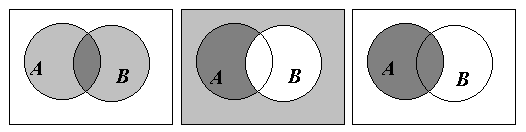
Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1. 

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рис. 7).



*Рис. 7.*



## Кортеж. Связь понятий кортежи множество

*Определение. Кортеж – множество элементов, расположенных в определенном порядке.Обозначается маленькими буквами.*

*Пустой кортеж это пустое множество.*<> = ∅

*Определение.****Упорядоченная пара****<x, y>- кортеж длины 2.*

Кортеж длины 3 (тройка) может быть определен как пара, вложенная в другую пару.

<z,<x,y>> = <z,x,y>

Кортеж длины 4 может быть определен 3 рекурсивно вложенными парами.

<w,<z,<x,y>>>

Свойства:

Кортежи равны, если равны элементы на одинаковых позициях.

<a1,a2,…,an> = <b1,b2,…,bn>тогда и только тогда, когда a1=b1,a2=b2,…,an=bn.

Кортеж может содержать несколько одинаковых элементов.

<1,2,2,3>!=<1,2,3>

Элементы кортежей упорядочены.

<1,2,3> = <1,2,3>, но <1,2,3>!=<3,2,1>

Кортежи содержат конечное количество элементов. Причина: для создания кортежа бесконечной длины потребуется бесконечное количество действий.

Задачи:

Дано:

* A={<1,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={<x,y>|x<=2;y>0};
* D={<x,y>|x>0;y<=3}

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | A∩C | {<1,2>,<2,3>,<1,5>} |
|  | B∩D | {<1,3>,<2,3>} |
|  | A∩B | {<2,3>} |
|  |  |  |

## Прямое произведение

*Определение. Прямым произведением множеств X и Y называется множество X×Y , элементами которого являются все возможные кортежи<x, y>, такие, что x*∈X, y∈Y.

*Определение. Прямым произведением множеств Х1, Х2, …, Хn называется совокупность всех кортежей<x1, …, xn> таких, что image097 . Если Х1=Х2=…Хn, то пишут image099 .*

*Пример 7.*

1. Пусть *X={1, 2, 3}, Y={0, 1}.*Тогда image101 ; image103 .

2. Пусть *Х* – множество точек отрезка [0, 1], а *Y* – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда *image093*- множество точек квадрата*image105*с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2).

Дано:

* A={<1,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={x|x<=2};
* D={y|y<=3}

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | C×D | {<x,y>|x<=2,y<=3} |
|  | D×C | {<x,y>|x<=3,y<=2} |
|  | D×D | {<x,y>|x<=3,y<=3} |
|  | C×!D | {<x,y>|x<=2,3<y} |
|  | A∩C×D | {<1,2>,<2,3>,<0,-3>} |
|  | B∩!C×C | {<x,y>|x<=2,2<y}  {<1,3>,<2,3>,<1,5>} |
|  |  |  |

## Отношения

*Определение.****Бинарным****(или двуместным)****отношениемr****называется множество кортежей.*

Если *r* есть отношение и пара *<x, y>* принадлежит этому отношению, то наряду с записью *<x, y>Îr* употребляется запись *xry*. Элементы *х* и *у* называются координатами (или компонентами) отношения *r*.

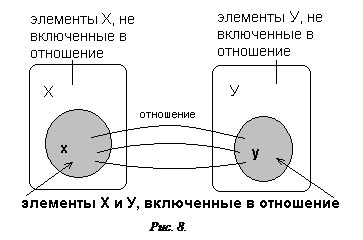
*Определение.****N-арным отношением****называется множество упорядоченных n-ок.*

*Определение.****Областью определения****бинарного отношения r называется множество image107*

*Определение.****Областью значений****бинарного отношения r называется множество image109*

Пусть *rÍ X´Y*определено в соответствии с изображением на рисунке 8 . Область определения *Dr* и область значений *Er* определяются соответственно:

*Dr={x: (x, y) Î r}, Er={y: (x,y)Î r}.*



Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств.Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент *cij*, стоящий на пересечении *i*-той строки и *j*-го столбца, равен 1, если *ai* и *aj* имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

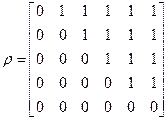
*Пример 8.*

Пусть M={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение *r*, заданное на множестве MrM , если r означает «быть строго меньше».

Отношение *r* как множество содержит все пары элементов *a, b* из *М* такие, что *a<b*. Тогда

*r = {(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}.*

Матрица отношения имеет вид:

 .

## Функции

*Определение. Бинарное отношение f называется****функцией****, если из <x, y> и <x, z> следует, что y=z.*

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции *f* и *g* равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается *Df*, а область значений – *Rf*. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если *f* – функция, то вместо *<x, y>Îf* пишут *y=f(x)* и говорят, что *y* – значение, соответствующее аргументу *х*, или *y* – образ элемента *х* при отображении *f*. При этом *х* называется прообразом элемента *y*.

*Определение. Назовем f****n-местной функцией****из Х в Y если f:XnRY. Тогда пишем y=f(x1, x2, …, xn) и говорим, что y – значение функции при значении аргументов x1, x2, …, xn.*

*Способ задания множества -* ***Порождающая процедура****: M={ x | x=f}, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов*. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

## Свойства функций

Пусть *f:XrY.*

*Определение. Функция f называется****инъективной****, если для любых х1, х2, y из y=f(x1) и y=f(x2) следует, что x1=x2, то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*

*Определение. Функция f называется****сюръективной****, если для любого элемента yÎY существует элемент хÎХ такой, что y=f(x).*

*Определение. Функция f называется****биективной****, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

Рисунок 9 иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

*Пример 9.*

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

1. функция *f(x)=ex* - инъективна, но не сюръективна;
2. функция *f(x)=x3-x* – сюръективна, но не инъективна;
3. функция *f(x)=2x+1* – биективна.

*Определение.****Суперпозиция функций****– функция, полученная из системы функций f, f1, f2, …, fk некоторой подстановкой функций f1, f2, …, fk во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.*

Пример 10.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

*Источники:*

<https://life-prog.ru/2_54722_nachalnie-ponyatiya-teorii-mnozhestv.html>

<https://stepik.org/course/83>

<http://mathprofi.net/mnozhestva.html>