Оглавление

[ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ 1](#_Toc20917645)

[НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 2](#_Toc20917646)

[Элементы и множества 2](#_Toc20917647)

[Графическое изображение множеств 5](#_Toc20917648)

[Операции над множествами 6](#_Toc20917649)

[Основные тождества алгебры множеств 9](#_Toc20917650)

[Кортеж. Связь понятий кортеж и множество 10](#_Toc20917651)

[Отношения 11](#_Toc20917652)

[Функции 12](#_Toc20917653)

[Прямое произведение 13](#_Toc20917654)

[Свойства функций 13](#_Toc20917655)

# ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика, или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин «конечная математика». Можно считать общепринятым деление математики на непрерывную и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Поэтому для задач дискретной математики обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная математика.

При исследовании, анализе и решении управленческих проблем, моделировании объектов исследования и анализа широко используются дискретные методы формализованного представления, являющиеся предметом рассмотрения в дискретной математике. К ним относятся методы, основанные на теоретико-множественных представлениях, графы, алгоритмы, математическая логика и др.

Дискретная математика предлагает:

* универсальные средства (языки) формализованного представления;
* способы корректной переработки информации, представленной на этих языках;
* возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательной ценности моделей.

Сегодня дискретная математика является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

# НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## Элементы и множества

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Философам давно ясно, что мир – единое неразрывное целое, и выделение в нем объектов – это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину. Но как бы там ни было, выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому не удивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов. Для определенности остановимся на следующем определении.

*Определение.**Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.*

Элементы во множестве не упорядочены. Можно понять, принадлежит элемент множеству или нет.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.; а элементы множеств – строчными буквами: *a, b, c* и т.д.

Если объект *х* является элементом множества *М*, то говорят, что *х принадлежит М*: *х∈М.* В противном случае говорят, что *х не принадлежит М*: *х∉М.* Знак *∈* это сокращение от латинского слова *element*. Знак применяется только для связи элементов и множеств.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить в множество, то относительно них существует значительная свобода.

*Пример 1.* Это может быть множество студентов, присутствующих на лекции, множество четных чисел и т. д.

Множества могут быть заданы тремя способами:

* перечислением элементов
* характеристическим предикатом
* порождающей процедурой

***Перечисление элементов****: М={a1, a2, …, ak}, т. е. список элементов;* При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только ***конечные множества*** (число элементов множества конечно, в противном случае множество называется бесконечным).

***Характеристический предикат****: М={x | P(x)} (описание характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы);* Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

***Порождающая процедура****: M={ x | x=f}, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов*. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

***Бесконечные множества*** задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

***Стандартные числовые множества***

ℕ = {1,2,3,…} – множество натуральных чисел (natural)

ℕ0 = {0,1,2,3,…}

ℤ – все целые числа (zahlen – нем. "числа")

ℚ – рациональные числа, которые могут быть выражены дробями. (quoziente – итал. "дробь")

ℝ – действительные числа (real)

ℙ – множества простых чисел (prime)

*Определение. Множество, не содержащее элементов, называется* ***пустым*** ∅*, оно является подмножеством любого множества.*

*Множество U называется* ***универсальным****, то есть все рассматриваемые множества являются его подмножеством.*

Эти понятия абстрактны и нужны для формальных умозаключений.

Пример 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Пример** | **Расшифровка** | **Способ записи** |
| МЕСЯЦЫ = {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь} | множество названий месяцев | перечисление |
| ЗИМА = {декабрь, январь, февраль} | множество зимних месяцев | перечисление |
| ДНИ\_ЯНВ = {d | x от 1 до 31 вкл.} | множество номеров дней января | предикат |
| ЧЕТ = {x | x >= 0 и x делится на 2 без остатка} | множество четных чисел | предикат |
| Y = {y | y делится на 4 без остатка} | множество високосных годов | предикат |
| КАЖДОЕ2 = {x | x1 = 0, xi = xi-1+2} | множество четных чисел | процедура |

*Определение. Множество А называется* ***подмножеством*** *множества В, если всякий элемент из А является элементом В. Обозначается как A* ⊆ B.

*КАЖДОЕ2* ⊆ ЧЕТ

ЧЕТ ⊆ КАЖДОЕ2

*Определение. Множество A называется* ***строгим (собственным) подмножеством*** *B, если A является подмножеством B и B не является подмножеством A. Обозначается как A* ⊂ *B.*

Пример 3.

A = {1,2,3,4}; B = {1,2,3,4,5}; C = {4,3,2,1}

A ⊂ B истинно, но A ⊆ B – ложно. Выражение B ⊂ A – ложно.

Какие элементы из множества B отсутствуют во множестве A?

A ⊆ C истинно и C ⊆ A – истинно. Порядок элементов не важен.

*ЗИМА является подмножеством МЕСЯЦЫ. ЗИМА* ⊂ МЕСЯЦЫ.

Но при этом МЕСЯЦЫ не являются подмножеством ЗИМА.

Задачи:

A = {9,8,7,6}, B = {8,6}, C = {5,7} a = 7, D = ∅

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Утверждение | Ответ |
|  | C⊂A | ложно |
|  | B⊂A | истинно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | ложно |
|  | a∈C | истинно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | B∈A | ложно |

Рассмотрим два определения равенства множеств.

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут А=В, А≠В – в противном случае.*

*Определение.* ***Множества*** *А и В считаются* ***равными****, если A* ⊆ B и B ⊆ A

*Определение.* ***Мощность*** *конечного множества А - это число его элементов.*

Мощность множества обозначают |A|.

Пример 4*.*

|∅|=0, |{1,3,5,7}|=4; |{2,4,6}|=3 | ℕ | = ∞

*Определение. Множества называются* ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

*Определение. Множество всех подмножеств множества А называется* ***булеаном*** *P(A).*

Известно, что если множество *А* содержит *n* элементов, то множество *P(A)* содержит *2n* элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества *А* в виде *2А*.

Пример 5.

*А={0, 1, 2}, P(A)={ ∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}*

## Графическое изображение множеств

Существует несколько способов графически изобразить множества:

1. Диаграммы Эйлера-Венна
2. Диаграммы на координатной прямой или плоскости

Построение диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество *U*, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Фигуры должны быть соответствующим образом обозначены.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Математическое обозначение |
| A  a  b  U | a∈A  b*∉*A  a∈U  b∈U  A⊂U |
| A  B  C  U  D | B⊂A  C⊄A  D⊆A  B⊂D  C⊄D  A⊂U  B⊂U  C⊂U  D⊂U |

Диаграммы на координатной прямой используются для изображения числовых множеств. Построение диаграммы заключается в изображении линии со стрелкой, которая обозначает числовую прямую. Каждая точка такой прямой обозначает какое-то число. Чем ближе число к стрелке, тем больше оно. Множества обозначаются дугами. Если множество задано неравенством, то на оси отмечается граница неравенства. Для строгого неравенства на границе ставится выколотая точка. Для нестрогого – закрашенная.

|  |  |
| --- | --- |
| Диаграмма на координатной прямой | Множество |
|  | A = {x|x<13} |
|  | B = {x|x>0} |

## Логические операции

Цель: при выполнении операций над множествами, которые заданы как предикаты, нужно уметь писать высказывания с использованием логических операций коньюнкции, дизъюнкции и т.п.

## Операции над множествами

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих. При этом для задания новых множеств с помощью предикатов потребуется использовать логические операторы.

Для иллюстрации операций над множествами и для решения задач фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Диаграмма Эйлера-Венна | Определение | Логическая операция |
| *Рис. 1.* | *Определение.* ***Объединением*** *множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В (рис. 1):* | *Дизъюнкция –(«ИЛИ», логическое сложение). Символ* ∨ от лат. (vel, что означает «или») |
| *Рис. 2.* | *Определение.* ***Пересечением*** *множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В (рис. 2):* |  |
| *Рис. 3.* | *Определение.* ***Разностью*** *множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В (рис. 3):* |  |
| *Рис. 4.* | *Определение.* ***Симметрической разностью*** *множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В (рис. 4):*  AΔB = {x | либо x∈A, либо x∈B |  |
|  | *Определение: Декартово произведение множество*  *A×B = {(a,b) | a*∈*A, b*∈*B}* |  |
| *Рис. 5.* | *Определение.* ***Абсолютным дополнением*** *множества А называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству А (рис. 5):* |  |

Пример 6. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения  (рис. 6).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| B∪C | A⋂(B∪C) |  |
| A⋂B | A⋂C | (A⋂B)∪(A⋂C) |

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Задачи:

A = {1,5,10,15}; B={5,7,9,11}; C = {1,2,3}; D=∅

Вычислить:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | A ∩ B | 5 |
|  | A ∩ C | 1 |
|  | B ∩ C | ∅ |
|  | A ∩ D | ∅ |
|  | A ∩ A | A |
|  | A ∪ B | {1,5,7,9,10,11,15} |
|  | B ∪ C | {1,2,3,5,7,9,11} |
|  | A ∪ D | A |
|  | A ∩ B ∪ C | {1,2,3,5} |
|  | (B ∪ C) ∩ A | {1,5} |
|  | A \ C | {5,10,15} |
|  | A \ B | {1,10,15} |
|  | A \ D | A |
|  | A \ (B ∪ C) | {10,15} |
|  | !A ∩ B | {7, 9, 11} |
|  | !B ∩ C | {1,2,3} |

A = {x|0<x}; B = {x|x<100}; C = {x|50<x}; D = {x|75<x};a=25

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | !A | {x|x<=0} |
|  | !B | {x|100<=x} |
|  | A∩B | {x|0<x<100} |
|  | A∩C | {x|0<x} |
|  | B∩C | {x|50<x<100} |
|  | !A∩B | {x|x<=0} |
|  | A∩!C | {x|0<x<=50} |
|  | D∩B | {x|75<x<100} |
|  | !A∩C | ∅ |
|  | A∪C | {x|0<x} |
|  | (A∩!C)∪(B∩D) | {x|0<x<50;75<x<100} |
|  | A∪(B∩C) | {x|0<x} |
|  | (A∩B)\C | {x|0<x<=50} |
|  | B\(C∩!D) | {x|x<=50;75<=x<100} |
|  | A∪!B | {x|0<x} |
|  | C∪D | {x|50<x} |
|  | D∩!B | {x|100<=x} |

Какие из утверждений истинны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Утверждение | Ответ |
|  | C⊂A | истинно |
|  | B⊂A | ложно |
|  | B⊆A | ложно |
|  | A⊂C | ложно |
|  | a∈A | истинно |
|  | a∈B | истинно |
|  | a∈C | ложно |
|  | a∈D | ложно |
|  | D⊂A | истинно |
|  | !B⊂C | истинно |
|  | !D⊂A | ложно |
|  | A∩B⊂B∩C | истинно |
|  | A∪!A⊆B∪!B | истинно |

Опишите множество возможных значений x, при которых выражение вычислимо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  |  | {x|x!=0} |
|  |  | {x|0<=x} |
|  |  | {x|x<=10} |
|  |  | {x|-5<=x} |
|  |  | {x|-7<=x<=10} |
|  |  | {x|-3<=x<0|0<=x} |

## Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств А, В, и С справедливы следующие соотношения (табл. 1):

*Таблица 1*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Коммутативность объединения | 1’. Коммутативность пересечения |
| 2. Ассоциативность объединения | 2’. Ассоциативность пересечения |
| 3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения | 3’. Дистрибутивность пересечения относительно объединения |
| 4. Законы действия с пустым и универсальным множествами | 4’. Законы действия с пустым и универсальным множествами |
| 5. Закон идемпотентности объединения | 5’. Закон идемпотентности пересечения |
| 6. Закон де Моргана | 6’. Закон де Моргана |
| 7. Закон поглощения | 7’. Закон поглощения |
| 8. Закон склеивания | 8’. Закон склеивания |
| 9. Закон Порецкого | 9’. Закон Порецкого |
| 10. Закон двойного дополнения | |

Пример 7.

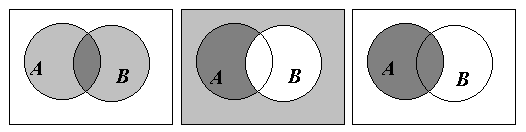
Доказать следующее тождество .

*Решение.*

Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1. 

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рис. 7).



*Рис. 7.*

## Кортеж. Связь понятий кортеж и множество

*Определение. Кортеж – множество элементов, расположенных в определенном порядке. Обозначается маленькими буквами.*

*Пустой кортеж это пустое множество.* <> = ∅

*Определение.****Упорядоченная пара****<x, y> - кортеж длины 2.*

Кортеж длины 3 (тройка) может быть определен как пара, вложенная в другую пару.

<z,<x,y>> = <z,x,y>

Кортеж длины 4 может быть определен 3 рекурсивно вложенными парами.

<w,<z,<x,y>>>

Свойства:

Кортежи равны, если равны элементы на одинаковых позициях.

<a1,a2,…,an> = <b1,b2,…,bn> тогда и только тогда, когда a1=b1,a2=b2,…,an=bn.

Кортеж может содержать несколько одинаковых элементов.

<1,2,2,3>!=<1,2,3>

Элементы кортежей упорядочены.

<1,2,3> = <1,2,3>, но <1,2,3>!=<3,2,1>

Кортежи содержат конечное количество элементов. Причина: для создания кортежа бесконечной длины потребуется бесконечное количество действий.

Задачи:

Дано:

* A={<1,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={<x,y>|x<=2;y>0};
* D={<x,y>|x>0;y<=3}

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | A∩C | {<1,2>,<2,3>,<1,5>} |
|  | B∩D | {<1,3>,<2,3>} |
|  | A∩B | {<2,3>} |
|  |  |  |

## Прямое произведение

*Определение. Прямым произведением множеств X и Y называется множество X×Y , элементами которого являются все возможные кортежи <x, y>, такие, что x*∈X, y∈Y.

*Определение. Прямым произведением множеств Х1, Х2, …, Хn называется совокупность всех кортежей <x1, …, xn> таких, что image097 . Если Х1=Х2=…Хn, то пишут image099 .*

*Пример 7.*

1. Пусть *X={1, 2, 3}, Y={0, 1}.*Тогда image101 ; image103 .

2. Пусть *Х* – множество точек отрезка [0, 1], а *Y* – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда *image093*- множество точек квадрата*image105*с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2).

Дано:

* A={<1,2>,<2,3>,<3,4>,<1,5>,<0,-3>};
* B={<1,3>,<2,3>,<4,5>,<6,1>};
* C={x|x<=2};
* D={y|y<=3}

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Выражение | Ответ |
|  | C×D | {<x,y>|x<=2,y<=3} |
|  | D×C | {<x,y>|x<=3,y<=2} |
|  | D×D | {<x,y>|x<=3,y<=3} |
|  | C×!D | {<x,y>|x<=2,3<y} |
|  | A∩C×D | {<1,2>,<2,3>,<0,-3>} |
|  | B∩!C×C | {<x,y>|x<=2,2<y}  {<1,3>,<2,3>,<1,5>} |
|  |  |  |

## Отношения

*Определение.****Бинарным****(или двуместным)****отношениемr****называется множество кортежей.*

Если *r* есть отношение и пара *<x, y>* принадлежит этому отношению, то наряду с записью *<x, y>Îr* употребляется запись *xry*. Элементы *х* и *у* называются координатами (или компонентами) отношения *r*.

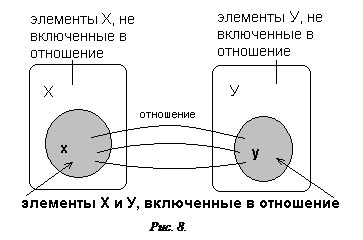
*Определение.****N-арным отношением****называется множество упорядоченных n-ок.*

*Определение.****Областью определения****бинарного отношения r называется множество image107*

*Определение.****Областью значений****бинарного отношения r называется множество image109*

Пусть *rÍ X´Y*определено в соответствии с изображением на рисунке 8 . Область определения *Dr* и область значений *Er* определяются соответственно:

*Dr={x: (x, y) Î r}, Er={y: (x,y)Î r}.*



Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств. Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент *cij*, стоящий на пересечении *i*-той строки и *j*-го столбца, равен 1, если *ai* и *aj* имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

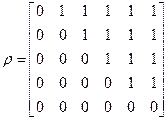
*Пример 8.*

Пусть M={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение *r*, заданное на множестве MrM , если r означает «быть строго меньше».

Отношение *r* как множество содержит все пары элементов *a, b* из *М* такие, что *a<b*. Тогда

*r = {(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}.*

Матрица отношения имеет вид:

 .

## Функции

*Определение. Бинарное отношение f называется****функцией****, если из <x, y> и <x, z> следует, что y=z.*

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции *f* и *g* равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается *Df*, а область значений – *Rf*. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если *f* – функция, то вместо *<x, y>Îf* пишут *y=f(x)* и говорят, что *y* – значение, соответствующее аргументу *х*, или *y* – образ элемента *х* при отображении *f*. При этом *х* называется прообразом элемента *y*.

*Определение. Назовем f****n-местной функцией****из Х в Y если f:XnRY. Тогда пишем y=f(x1, x2, …, xn) и говорим, что y – значение функции при значении аргументов x1, x2, …, xn.*

## Свойства функций

Пусть *f:XrY.*

*Определение. Функция f называется****инъективной****, если для любых х1, х2, y из y=f(x1) и y=f(x2) следует, что x1=x2, то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*

*Определение. Функция f называется****сюръективной****, если для любого элемента yÎY существует элемент хÎХ такой, что y=f(x).*

*Определение. Функция f называется****биективной****, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

Рисунок 9 иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

*Пример 9.*

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

1. функция *f(x)=ex* - инъективна, но не сюръективна;
2. функция *f(x)=x3-x* – сюръективна, но не инъективна;
3. функция *f(x)=2x+1* – биективна.

*Определение.****Суперпозиция функций****– функция, полученная из системы функций f, f1, f2, …, fk некоторой подстановкой функций f1, f2, …, fk во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.*

Пример 10.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

*Источники:*

<https://life-prog.ru/2_54722_nachalnie-ponyatiya-teorii-mnozhestv.html>

<https://stepik.org/course/83>

<http://mathprofi.net/mnozhestva.html>